**Вказівки до розв’язання завдань ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у 2024-2025 навчальному році**

Підведення підсумків, визначення переможців та склад команди на наступний етап олімпіади, нагородження дипломами І, ІІ або ІІІ ступенів відбувається згідно «Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності» (затвердженим наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 р. № 1099, зареєстрованим в Міністерстві юстиції України 17.11.2011 р. за № 1318/20056) та «Змін до Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності (зареєстрований у Міністерстві юстиції України 06 грудня 2021 року за № 1570/37192), (затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 25 жовтня 2021 р. № 1127).

**6 клас**

6.1 Є два числа. Яке з чисел більше та на скільки, якщо 5% першого числа дорівнюють 15, а 8% від другого дорівнюють 16?

***Відповідь.***Перше число більше другого на 100.

* 1. Великий квадрат розрізали на однакові маленькі квадратики. Потім перелічили усі маленькі квадратики, які дотикаються до контуру великого квадрата. Їх виявилось 44. На скільки маленьких квадратиків було розрізано великий квадрат?

***Вказівка****.* Розіб’ємо контур великого квадрата за допомогою 4 однакових смужок – прямокутники шириною в один маленький квадрат як показано на малюнку



***Відповідь*.** 144 маленьких квадрати

6.3. Відновити запис множення

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | \* | 2 | \* |
|  |  |  | \* | 7 |
|  |  | \* | \* | \* |
| \* | \* | \* | \* |  |
| \* | \* | \* | \* | 8 |

***Відповідь****.*****

6.4. На дошці записано число 23. Щохвилини число стирають з дошки і записують на його місце добуток його цифр, збільшений на 12. Що виявиться на дошці через годину?

***Вказівка.***

$2∙3+12=18$ (назвемо це число першим)

$1∙8+12=20$ (друге число; через 2 хвилини)

$2∙0+12=12$ (третє число; через 3 хвилини)

$1∙2+12=14$ (четверте число; через 4 хвилини)

$1∙4+12=16$ (п’яте число; через 5 хвилин)

$1∙8+12=20$ (шосте число; через 6 хвилин)

……………………….

Таким чином через одну годину на дошці буде записано число 16.

***Відповідь***. 16

1. клас
	1. Петрик з’їв $\frac{1}{3}$ всіх яблук і ще два яблука, Миколка з’їв $\frac{1}{4}$ всіх яблук і ще одне яблуко, а Вітя – половину тих яблук, що залишилися після Петрика і Миколки. Після цього залишилось $\frac{1}{6}$ від початкової кількості яблук. Скільки яблук було спочатку?

***Відповідь.*** 36 яблук.

* 1. Середнє арифметичне десяти різних натуральних чисел дорівнює 10. Яке найбільше можливе значення може приймати найбільше з цих чисел?

***Відповідь.*** 55.

* 1. Три цифри п'ятицифрового числа – четвірки. Знайти це число, знаючи, що воно ділиться без остачі на 315.

*Вказівка.* Остання цифра 0 або 5. Якщо це 0, то за ознакою подільності на 9 робимо висновок, що це одна цифра 6. Але 315 = 5 ⋅ 7 ⋅ 9. Тому з можливих варіантів 44460, 44640, 46440, 64440 жоден не відповідає умові, бо ці числа не діляться на 7. Якщо це 5, то інша невідома цифра – 1 (за ознакою подільності на 9). З можливих чисел 44415, 44145, 41445, 14445 на 7 ділиться лише перше: 44415.

 *Відповідь.* 44415.

* 1. Як шматок картону прямокутної форми зі сторонами 9 см і 4 см розрізати на дві рівні частини так, щоб можна було скласти квадрат?

***Відповідь.***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

* 1. На столі стоять 7 склянок, перевернутих догори дном. Дозволяється перевертати будь-які дві склянки. Чи можна домогтися того, щоб усі склянки перевернулися?

***Вказівка.*** Кількість одночасно перевернутих склянок може дорівнювати: 0, 2, 4, 6. Отже, всі 7 перевернути неможливо.

***Відповідь.*** Ні.

1. клас
	1. Побудувати графік функції $y=\left|x+1\right|-\frac{x}{\left|x\right|}.$

*Вказівка.* $Якщо x<-1, то y=-x.$

Якщо $-1\leq x<0, то y=x+2.$

Якщо x$>0, то y=x. x\ne 0.$

*Відповідь.*



* 1. Розв’язати систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c}xy^{2}-18=2y^{2}-3x,\\3xy-24=6y-5x.\end{array}\right.$$

***Вказівка.*** $xy^{2}-6-2y^{2}+3x=12; \left(x - 2\right)\left(y^{2}+3\right)=12;$

$$3xy - 6y+5x - 10=14; \left(x - 2\right)\left(3y+5\right)=14.$$

$$Поділивши одне рівняння на друге, дістанемо:$$

$$\frac{y^{2}+3}{3y+5}=\frac{6}{7}.$$

$$Звідси y\_{1}=3; y\_{2}=-\frac{3}{7}.$$

$$Відповідно, x\_{1}=3, x\_{2}=\frac{75}{13}.$$

 *Відповідь.* $\left(3; 3\right), \left(\frac{75}{13}; -\frac{3}{7} \right)$.

* 1. Коли автомобіль проїхав частину шляху від А до В, виявилось, що він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин йому прийдеться їхати частину шляху, що залишилась. Але, коли він проїхав і цю частину шляху, то виявилося, що знову він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин він витратив на першу частину шляху. Скільки кілометрів за годину проїжджав автомобіль?

*Вказівка.* $\left\{\begin{array}{c}S\_{1}=v∙S\_{2}\\S\_{2}=v∙s\_{1}\end{array}\right.,$$\left(S\_{1}+S\_{2}\right)∙v=S\_{1}+S\_{2}. v=1 км/хв=60\frac{км}{год}.$

*Відповідь.* 60 км/год

* 1. На дошці записано число 12345678910111213…. Яка цифра буде стояти на 2024 місці?

*Вказівка.* У записі числа використано 9 одноцифрових чисел, 90 -двоцифрових чисел, 180 цифр. 2024-189 =1835. Трицифрових чисел: $\left[\frac{1835}{3}\right]=611.$ $\left[a\right] -ціла частина a.$ 611 – трицифрових чисел використано у записі числа. (611х3=1833, 1835-1833 = 2). 612 – наступне число. Таким чином, 2024 цифрою в запису даного числа буде цифра одиниця (1).

*Відповідь.* 2024 цифрою в запису даного числа буде цифра одиниця (1).

* 1. У пакеті міститься 9 кг крупи. Спробуйте за допомогою ваги з гирями в 50 г і 200 г розділити всю крупу в два пакети: в один – 2 кг, у другий – 7 кг. При цьому дозволяється провести лише три зважування.

 *Вказівка.* Перше зважування: розділити крупу на дві рівні частини (це можна зробити без гирь). Друге зважування: одну з одержаних частин ще раз розділити навпіл – по 2,25 кг. Третє зважування: від однієї з цих частин відважити (за допомогою гирь) 250 г. Залишиться 2 кг.

1. **клас**
	1. Розв’язати в дійсних числах рівняння $\left(1+4x^{2}\right)\left(1+9y^{2}\right)=24xy.$

*Вказівка.* $\left(1+4x^{2}\right)\left(1+9y^{2}\right)-24xy=0;$

$1+4x^{2}+9y^{2}+36x^{2}y^{2}-24xy$=0;

$$\left(1-6xy\right)^{2}+\left(2x-3y\right)^{2}=0;$$

$$Звідси 6xy=1;$$

$2x-3y$=0, тобто$ x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3 } або x=-\frac{1}{2}; y= -\frac{1}{3}.$

*Відповідь*. $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3} або x=- \frac{1}{2}; y = - \frac{1}{3}.$

9.2. Розв’язати систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c}xy+x+y=80,\\yz+y+z=80,\\zx+z+x=80.\end{array}\right.$$

***Вказівка.*** Прирівнюючи ліві частини перших двох рівнянь, одержимо $x\left(y+1\right)=z\left(y+1\right), звідси y= -1 або x=z. $

$$ Випадок y=-1 неможливий, тому що перше рівняння дає $$

$$-1=80. Для x=z з третього рівняння одержимо $$

$$x= - 10 або x=8.$$

$$ Звідси, знаходимо y і z. $$

 *Відповідь.* $\left(-10; -10; -10\right); \left(8; 8; 8\right)$

* 1. Знайти висоту трапеції, в якій гострі кути при більшій основі дорівнюють 150 і 750, а різниця основ дорівнює *m.*

*Вказівка.* $ AB∩CD=E$, $∠AED=90^{0}$. Довести, що у прямокутному трикутнику з кутами $15^{0}$ і $75^{0}$ висота проведена до гіпотенузи дорівнює четвертій частині гіпотенузи. В ΔAED O – центр описаного кола лежить на середині гіпотенузи AD. ΔAOE – рівнобедрений. Тоді ∠AEO=$15^{0},$ ∠AOE=$150^{0}$. ∠EON=$30^{0}$. Тоді з ΔEОN $EN=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}∙\frac{1}{2}AD=\frac{1}{4}AD. AD=a,BC=b. …………..$

$$ EM=\frac{a-b}{4}=\frac{m}{4}.$$

*Відповідь.* $\frac{m}{4}.$

* 1. При яких значеннях *а* рівняння$ \left(a+4x-x^{2}-1\right)\left(a+1-\left|x-2\right|\right)=0$ має рівно три корені?

*Вказівка.* Побудувати графіки функцій$a=x^{2}-4x+1$ і $a=\left|x-2\right|-1$



Лише пряма *а* = -1 перетинає отримані графіки у трьох точках

*Відповідь. a* = -1

9.5. У вершинах трикутника написані числа 1, 2, 3. Потім кожне з чисел одночасно замінили на суму двох сусідніх. Цю операцію провели ще декілька разів. Чи може сума одержаних трьох чисел дорівнювати 3000000?

*Вказівка.* $S\_{0}=1+2+3=6.$

$$S\_{1}=\left(2+3\right)+\left(1+3\right)+\left(1+2\right)=12=6∙2=S\_{0}∙2.$$

В нову суму в якості доданків рівно двічі входить кожне зі старих чисел. Тоді очевидно, що $S\_{2}=2∙S\_{1}=S\_{0}∙2^{2}=6∙2^{2}.$ $S\_{n}=6∙2^{n}.$

$6∙2^{n}=3000000 $– розв’язати в натуральних числах. Права частина рівняння ділиться на 5, а ліва не ділиться. Отже, вказана рівність не можлива при жодному натуральному *n.*

*Відповідь.* Ні

1. клас

10.1.Довести, що добуток чотирьох послідовних цілих чисел, у сумі з одиницею, є точний квадрат.

*Вказівка.* Позначимо 4 послідовних цілих числа n, (n+1), (n+2), (n+3). Розкриємо дужки. Погрупуємо, винесемо спільний множник за дужки і отримаємо повний квадрат тричлена $\left(n^{2}+3n+1\right)^{2}.$

*Відповідь.* $\left(n^{2}+3n+1\right)^{2}.$

* 1. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника АВС взяли точки M та N такі, що AC= AM і BC= BN . Довеcти, що кут MCN дорівнює 450

***Вказівка.***

1. З’ясувати розміщення точок *M і N* відносно вершин *A і B.* Пояснити: *M і N –* не співпадають. *M* - не належить *AN, M -* не співпадає з *А.* *N* – не співпадає з *B.*

Отже, розміщення точок *M і N* як на малюнку.

1. Доведемо, що кут *MCN* дорівнює $\frac{π}{4}$. Нехай кут А – α, кут В – β, а їх сума дорівнює $\frac{π}{2}.$ $∠ACM=∠AMC= \frac{π-α}{2}$. Аналогічно ∠BNC=$\frac{π-β}{2}$.
2. ∠MCN = π – ($\frac{π-α}{2}+\frac{π-β}{2}$)= $\frac{α+β}{2}$.

Отже, $∠MCN=45^{0}$

***Відповідь.*** $∠MCN=45^{0}$

* 1. Довести нерівність $\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+...+\frac{1}{2024^{2}}<1.$

*Вказівка.* $\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+...+\frac{1}{2024^{2}}<\frac{1}{1∙2}+\frac{1}{2∙3}+\frac{1}{3∙4}+…+\frac{1}{2023∙2024}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+…+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}=1-\frac{1}{2024}<1$.

* 1. Трицифрове натуральне число $\overbar{abc}=a!+b!+c!.$

Знайти це число і довести, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує.

*Вказівка.* Шуканим є число 145 = 1+24+120 = 1!+4!+5!.

Доведемо, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує.

Справді, найбільша цифра такого числа не більша за 5, бо 4! +4!+4! =72 <100. Вона не менша за 6, так як 7!+0!+0! = 5040>999, та не дорівнює 6, оскільки, 6!+0!+0!=722 починається з цифри 7. Тому найбільша цифра шуканого числа дорівнює 5.

 Усі три цифри такого числа не можуть бути рівними 5, бо 555 ≠360=5!+5!+5!. Так само не може бути двох цифр 5, бо тоді 0!+5!+5! =241≤$\overbar{abc}$ ≤4!+5!+5!=264, але 255≠242=2!+5!+5!.

Отже, в десятковому записі шуканого числа цифра 5 одна. Тому 1!+0!+5!=122≤$\overbar{abc}$ ≤4!+4!+5!=168, і його першою цифрою є цифра *a* = 1. Оскільки при цьому $\overbar{abc}=1!+4!+5!=145, то саме с=5, 2\leq b\leq 4.$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що серед чисел 125, 135, та 145 лише останнє задовольняє умову задачі.

*Відповідь.* 145.

* 1. Парабола на координатній площині має назву «красива», якщо її вершина та дві точки перетину з віссю абсцис утворюють рівносторонній трикутник. Довести, що дискримінанти квадратних тричленів, у яких графіками є «красиві» параболи, рівні. Знайти значення цих дискримінантів.

*Вказівка.* Нехай графіком квадратного тричлена $y=ax^{2}+bx+c=f\left(x\right)$ є «красива» парабола. Тоді за умовою її вершина *Р* та дві точки *M* і *N* її перетину з віссю абсцис утворюють рівносторонній $∆MNP.$



Нехай $x\_{1}$ *і*$ x\_{2}$ *-* менший і більшийкорені квадратного рівняння $ax^{2}+bx+c=0$. ($x\_{1}$ *і*$ x\_{2}- абсциси точок M і N відповідно$). *MN* – сторона правильного трикутника *MNP* і її довжина дорівнює:

$$MN=x\_{2}-x\_{1}=\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{\left|a\right|}.$$

$PP^{'}$ - висота $∆MNP. З ∆NPP^{'}$ $PP^{'}=\frac{\sqrt{D}}{\left|a\right|}∙\frac{\sqrt{3}}{2}$.

З іншого боку $PP^{'}$ можна знайти як модуль ординати вершини параболи. Вершина параболи *Р* має координати $(x\_{0};y\_{0})$. $x\_{0}=\frac{-b}{2a}.$

Знайдемо значення квадратного тричлена $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$ при $x=x\_{0}$ . Це і буде ордината вершини параболи $\frac{-D}{4a}.$

Отже, довжина висоти $PP^{'}$ дорівнює $\frac{D}{4\left|a\right|}.$

Прирівняємо дві формули довжини $PP^{'}:$ $\frac{D}{4\left|a\right|}=\frac{\sqrt{D}}{\left|a\right|}∙\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a\ne 0.$

Після перетворень отримуємо *D*=0, *D*=12. *D*=0 – не задовольняє умову задачі, то *D*=12.

Отже, кожний квадратний тричлен, графіком якого є «красива» парабола, має дискримінант рівний 12. Останнє доводить, що дискримінанти всіх таких квадратних тричленів є рівними.

***Відповідь.*** 12

1. **клас**

11.1. Функція $f\left(x\right)$ має вигляд $f\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+d}$ , де a, b, c, d – деякі числа. Відомо, що $f\left(0\right)= 1, f\left(1\right)=0, f\left(2\right)=3.$ Чому дорівнює $f\left(3\right)$?

*Вказівка.* За умовою функція $f\left(x\right)$ має вигляд $f\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+d}$ , де a, b, c, d – деякі числа. Відомо, що $f\left(0\right)= 1, f\left(1\right)=0, f\left(2\right)=3.$ Оскільки $f\left(0\right)=\frac{b}{d}=1, то b=d, і тому f\left(х\right) можна подати у вигляді $

$$f\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+b}.$$

 $f\left(1\right)=\frac{a+b}{c+b}=0, b=-a, тому f\left(x\right) має вигляд:$

$f\left(x\right)=\frac{ax-a}{cx-a}$. Аналогічно з умови $f\left(2\right)=\frac{2a-a}{2c-a}=3.$ $2a-a=6c-3a;c=\frac{2}{3}a.$

Тоді $f\left(x\right)=\frac{ax-a}{\frac{2}{3}ax-a}=\frac{a(x-1)}{a(\frac{2}{3}x-1)}=\frac{x-1}{\frac{2}{3}x-1}=\frac{3(x-1)}{2x-3}.$ При даних умовах *a* не може дорівнювати нулеві.

З припущення слідують наступні умови $1=\frac{b}{d}; 0=\frac{a+b}{c+d}; 3=\frac{b}{3c+d},$ які одночасно не можуть виконуватись.

Тоді $f\left(3\right)=\frac{3(3-1)}{2∙3-3}=2.$

*Відповідь.* $f\left(3\right)=2$

* 1. Знайти найбільший цілий розв’язок нерівності $\left|x^{2}-3x-3\right|>\left|x^{2}+7x-13\right|.$

***Вказівка.*** Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і виконаємо тотожні перетворення:

$$\left|x^{2}-3x-3\right|>\left|x^{2}+7x-13\right|;$$

$|x^{2}-3x-3|^{2}>|x^{2}+7x-13|^{2}$ ;

$\left(x^{2}-3x-3\right)^{2}>\left(x^{2}+7x-13\right)^{2};$ …

$$\left(\left(x^{2}-3x-3\right)+\left(x^{2}+7x-13\right)\right)∙\left(\left(x^{2}-3x-3\right)-\left(x^{2}+7x-13\right)\right)>0. $$

Виконаємо відповідні перетворення і отримаємо $\left(x-1\right)∙\left(x-2\right)∙\left(x+4\right)<0.$

Отже, найбільшим цілим числом, яке задовольняє останню нерівність є число -5.

***Відповідь.*** -5

* 1. Застосовуючи теорему косинусів, знайти найменше значення виразу: $\sqrt{1+x^{2}-x}$+$\sqrt{1+x^{2}-x\sqrt{3}}.$

 *Вказівка.* Розглянемо рівнобедрений прямокутний трикутник, у якого катет дорівнює 1, а на промені, який ділить прямий кут на 30 і 60. Відкладемо відрізок х. Тоді відповідний відрізок є довжиною ламаної, яку утворюють відрізки, які лежать напроти кутів у 30 і 60. Тоді зрозуміло, що довжина цієї ламаної мінімальна, коли це відрізок прямої, тобто гіпотенуза прямокутного трикутника зі стороною 1. Тому найменше значення виразу – .

*Відповідь.* $\sqrt{2}.$

* 1. На продовжені сторони AD вписаного чотирикутника ABCD за точку D відмітили точку E так, що AC=CE і ∠BDC=∠DEC. Відомо, що DE = 1 см. Знайти довжину сторони AB.



*Вказівка.* Нехай $∠DEC=α, тоді ∠DAC=∠BDC=α.$ ∠BDC=α. ∠BAC=∠BDC. ∠ABC = $180^{0}-∠ADC= ∠СDE. $ ΔADC = ΔEDC.

Отже, AB=DE=1 см.

*Відповідь.* 1 см.

* 1. Довести, що коли сума плоских кутів при вершині піраміди більша , то кожне бічне ребро піраміди менше півпериметра її основи.

***Вказівка*.** Зробити розгортку бічної поверхні даної піраміди.

**11.11 2024 р.**