**Вказівки до розв’язання завдань ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у 2024-2025 навчальному році**

Підведення підсумків, визначення переможців та склад команди на наступний етап олімпіади, нагородження дипломами І, ІІ або ІІІ ступенів відбувається згідно «Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності» (затвердженим наказом Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 р. № 1099, зареєстрованим в Міністерстві юстиції України 17.11.2011 р. за № 1318/20056) та «Змін до Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності (зареєстрований у Міністерстві юстиції України 06 грудня 2021 року за № 1570/37192), (затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України від 25 жовтня 2021 р. № 1127).

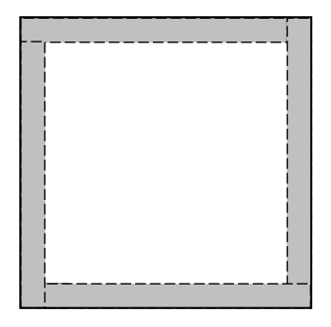
**6 клас**

6.1 Є два числа. Яке з чисел більше та на скільки, якщо 5% першого числа дорівнюють 15, а 8% від другого дорівнюють 16?

***Відповідь.***Перше число більше другого на 100.

* 1. Великий квадрат розрізали на однакові маленькі квадратики. Потім перелічили усі маленькі квадратики, які дотикаються до контуру великого квадрата. Їх виявилось 44. На скільки маленьких квадратиків було розрізано великий квадрат?

***Вказівка****.* Розіб’ємо контур великого квадрата за допомогою 4 однакових смужок – прямокутники шириною в один маленький квадрат як показано на малюнку



***Відповідь*.** 144 маленьких квадрати

6.3. Відновити запис множення

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | \* | 2 | \* |
|  |  |  | \* | 7 |
|  |  | \* | \* | \* |
| \* | \* | \* | \* |  |
| \* | \* | \* | \* | 8 |

***Відповідь****.*****

6.4. На дошці записано число 23. Щохвилини число стирають з дошки і записують на його місце добуток його цифр, збільшений на 12. Що виявиться на дошці через годину?

***Вказівка.***

(назвемо це число першим)

(друге число; через 2 хвилини)

(третє число; через 3 хвилини)

(четверте число; через 4 хвилини)

(п’яте число; через 5 хвилин)

(шосте число; через 6 хвилин)

……………………….

Таким чином через одну годину на дошці буде записано число 16.

***Відповідь***. 16

1. клас
   1. Петрик з’їв всіх яблук і ще два яблука, Миколка з’їв всіх яблук і ще одне яблуко, а Вітя – половину тих яблук, що залишилися після Петрика і Миколки. Після цього залишилось від початкової кількості яблук. Скільки яблук було спочатку?

***Відповідь.*** 36 яблук.

* 1. Середнє арифметичне десяти різних натуральних чисел дорівнює 10. Яке найбільше можливе значення може приймати найбільше з цих чисел?

***Відповідь.*** 55.

* 1. Три цифри п'ятицифрового числа – четвірки. Знайти це число, знаючи, що воно ділиться без остачі на 315.

*Вказівка.* Остання цифра 0 або 5. Якщо це 0, то за ознакою подільності на 9 робимо висновок, що це одна цифра 6. Але 315 = 5 ⋅ 7 ⋅ 9. Тому з можливих варіантів 44460, 44640, 46440, 64440 жоден не відповідає умові, бо ці числа не діляться на 7. Якщо це 5, то інша невідома цифра – 1 (за ознакою подільності на 9). З можливих чисел 44415, 44145, 41445, 14445 на 7 ділиться лише перше: 44415.

*Відповідь.* 44415.

* 1. Як шматок картону прямокутної форми зі сторонами 9 см і 4 см розрізати на дві рівні частини так, щоб можна було скласти квадрат?

***Відповідь.***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

* 1. На столі стоять 7 склянок, перевернутих догори дном. Дозволяється перевертати будь-які дві склянки. Чи можна домогтися того, щоб усі склянки перевернулися?

***Вказівка.*** Кількість одночасно перевернутих склянок може дорівнювати: 0, 2, 4, 6. Отже, всі 7 перевернути неможливо.

***Відповідь.*** Ні.

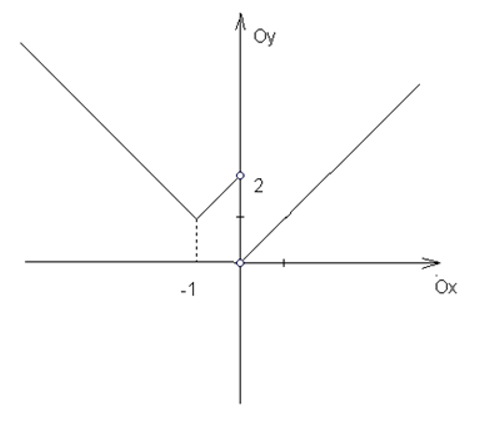
1. клас
   1. Побудувати графік функції

*Вказівка.*

Якщо

Якщо x

*Відповідь.*



* 1. Розв’язати систему рівнянь:

***Вказівка.***

*Відповідь.* .

* 1. Коли автомобіль проїхав частину шляху від А до В, виявилось, що він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин йому прийдеться їхати частину шляху, що залишилась. Але, коли він проїхав і цю частину шляху, то виявилося, що знову він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин він витратив на першу частину шляху. Скільки кілометрів за годину проїжджав автомобіль?

*Вказівка.*

*Відповідь.* 60 км/год

* 1. На дошці записано число 12345678910111213…. Яка цифра буде стояти на 2024 місці?

*Вказівка.* У записі числа використано 9 одноцифрових чисел, 90 -двоцифрових чисел, 180 цифр. 2024-189 =1835. Трицифрових чисел: 611 – трицифрових чисел використано у записі числа. (611х3=1833, 1835-1833 = 2). 612 – наступне число. Таким чином, 2024 цифрою в запису даного числа буде цифра одиниця (1).

*Відповідь.* 2024 цифрою в запису даного числа буде цифра одиниця (1).

* 1. У пакеті міститься 9 кг крупи. Спробуйте за допомогою ваги з гирями в 50 г і 200 г розділити всю крупу в два пакети: в один – 2 кг, у другий – 7 кг. При цьому дозволяється провести лише три зважування.

*Вказівка.* Перше зважування: розділити крупу на дві рівні частини (це можна зробити без гирь). Друге зважування: одну з одержаних частин ще раз розділити навпіл – по 2,25 кг. Третє зважування: від однієї з цих частин відважити (за допомогою гирь) 250 г. Залишиться 2 кг.

1. **клас**
   1. Розв’язати в дійсних числах рівняння

*Вказівка.*

=0;

=0, тобто

*Відповідь*.

9.2. Розв’язати систему рівнянь:

***Вказівка.*** Прирівнюючи ліві частини перших двох рівнянь, одержимо

*Відповідь.*

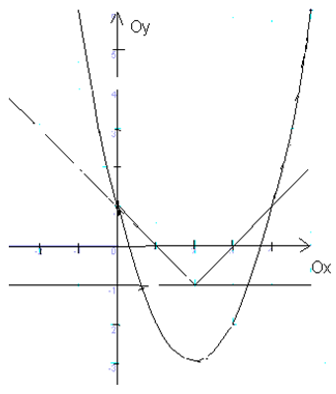
* 1. Знайти висоту трапеції, в якій гострі кути при більшій основі дорівнюють 150 і 750, а різниця основ дорівнює *m.*

*Вказівка.* , . Довести, що у прямокутному трикутнику з кутами і висота проведена до гіпотенузи дорівнює четвертій частині гіпотенузи. В ΔAED O – центр описаного кола лежить на середині гіпотенузи AD. ΔAOE – рівнобедрений. Тоді ∠AEO= ∠AOE=. ∠EON=. Тоді з ΔEОN

*Відповідь.*

* 1. При яких значеннях *а* рівняння має рівно три корені?

*Вказівка.* Побудувати графіки функцій і



Лише пряма *а* = -1 перетинає отримані графіки у трьох точках

*Відповідь. a* = -1

9.5. У вершинах трикутника написані числа 1, 2, 3. Потім кожне з чисел одночасно замінили на суму двох сусідніх. Цю операцію провели ще декілька разів. Чи може сума одержаних трьох чисел дорівнювати 3000000?

*Вказівка.*

В нову суму в якості доданків рівно двічі входить кожне зі старих чисел. Тоді очевидно, що

– розв’язати в натуральних числах. Права частина рівняння ділиться на 5, а ліва не ділиться. Отже, вказана рівність не можлива при жодному натуральному *n.*

*Відповідь.* Ні

1. клас

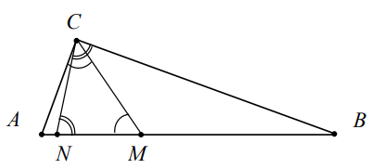
10.1.Довести, що добуток чотирьох послідовних цілих чисел, у сумі з одиницею, є точний квадрат.

*Вказівка.* Позначимо 4 послідовних цілих числа n, (n+1), (n+2), (n+3). Розкриємо дужки. Погрупуємо, винесемо спільний множник за дужки і отримаємо повний квадрат тричлена

*Відповідь.*

* 1. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника АВС взяли точки M та N такі, що AC= AM і BC= BN . Довеcти, що кут MCN дорівнює 450

***Вказівка.***

1. З’ясувати розміщення точок *M і N* відносно вершин *A і B.* Пояснити: *M і N –* не співпадають. *M* - не належить *AN, M -* не співпадає з *А.* *N* – не співпадає з *B.*

Отже, розміщення точок *M і N* як на малюнку.

1. Доведемо, що кут *MCN* дорівнює . Нехай кут А – α, кут В – β, а їх сума дорівнює . Аналогічно ∠BNC=.
2. ∠MCN = π – ()= .

Отже,

***Відповідь.***

* 1. Довести нерівність

*Вказівка.* .

* 1. Трицифрове натуральне число

Знайти це число і довести, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує.

*Вказівка.* Шуканим є число 145 = 1+24+120 = 1!+4!+5!.

Доведемо, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує.

Справді, найбільша цифра такого числа не більша за 5, бо 4! +4!+4! =72 <100. Вона не менша за 6, так як 7!+0!+0! = 5040>999, та не дорівнює 6, оскільки, 6!+0!+0!=722 починається з цифри 7. Тому найбільша цифра шуканого числа дорівнює 5.

Усі три цифри такого числа не можуть бути рівними 5, бо 555 ≠360=5!+5!+5!. Так само не може бути двох цифр 5, бо тоді 0!+5!+5! =241≤ ≤4!+5!+5!=264, але 255≠242=2!+5!+5!.

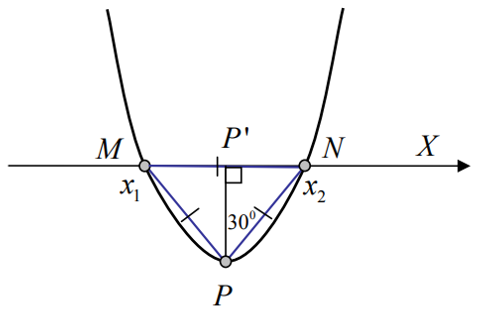
Отже, в десятковому записі шуканого числа цифра 5 одна. Тому 1!+0!+5!=122≤ ≤4!+4!+5!=168, і його першою цифрою є цифра *a* = 1. Оскільки при цьому

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що серед чисел 125, 135, та 145 лише останнє задовольняє умову задачі.

*Відповідь.* 145.

* 1. Парабола на координатній площині має назву «красива», якщо її вершина та дві точки перетину з віссю абсцис утворюють рівносторонній трикутник. Довести, що дискримінанти квадратних тричленів, у яких графіками є «красиві» параболи, рівні. Знайти значення цих дискримінантів.

*Вказівка.* Нехай графіком квадратного тричлена є «красива» парабола. Тоді за умовою її вершина *Р* та дві точки *M* і *N* її перетину з віссю абсцис утворюють рівносторонній



Нехай  *і -* менший і більшийкорені квадратного рівняння . ( *і*). *MN* – сторона правильного трикутника *MNP* і її довжина дорівнює:

- висота .

З іншого боку можна знайти як модуль ординати вершини параболи. Вершина параболи *Р* має координати .

Знайдемо значення квадратного тричлена при . Це і буде ордината вершини параболи

Отже, довжина висоти дорівнює

Прирівняємо дві формули довжини ,

Після перетворень отримуємо *D*=0, *D*=12. *D*=0 – не задовольняє умову задачі, то *D*=12.

Отже, кожний квадратний тричлен, графіком якого є «красива» парабола, має дискримінант рівний 12. Останнє доводить, що дискримінанти всіх таких квадратних тричленів є рівними.

***Відповідь.*** 12

1. **клас**

11.1. Функція має вигляд , де a, b, c, d – деякі числа. Відомо, що Чому дорівнює ?

*Вказівка.* За умовою функція має вигляд , де a, b, c, d – деякі числа. Відомо, що Оскільки

. Аналогічно з умови

Тоді При даних умовах *a* не може дорівнювати нулеві.

З припущення слідують наступні умови які одночасно не можуть виконуватись.

Тоді

*Відповідь.*

* 1. Знайти найбільший цілий розв’язок нерівності

***Вказівка.*** Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і виконаємо тотожні перетворення:

;

…

Виконаємо відповідні перетворення і отримаємо

Отже, найбільшим цілим числом, яке задовольняє останню нерівність є число -5.

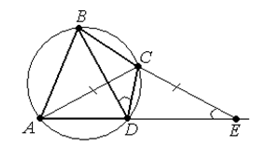
***Відповідь.*** -5

* 1. Застосовуючи теорему косинусів, знайти найменше значення виразу: +

*Вказівка.* Розглянемо рівнобедрений прямокутний трикутник, у якого катет дорівнює 1, а на промені, який ділить прямий кут на 30 і 60. Відкладемо відрізок х. Тоді відповідний відрізок є довжиною ламаної, яку утворюють відрізки, які лежать напроти кутів у 30 і 60. Тоді зрозуміло, що довжина цієї ламаної мінімальна, коли це відрізок прямої, тобто гіпотенуза прямокутного трикутника зі стороною 1. Тому найменше значення виразу – .

*Відповідь.*

* 1. На продовжені сторони AD вписаного чотирикутника ABCD за точку D відмітили точку E так, що AC=CE і ∠BDC=∠DEC. Відомо, що DE = 1 см. Знайти довжину сторони AB.



*Вказівка.* Нехай ∠BDC=α. ∠BAC=∠BDC. ∠ABC = ΔADC = ΔEDC.

Отже, AB=DE=1 см.

*Відповідь.* 1 см.

* 1. Довести, що коли сума плоских кутів при вершині піраміди більша , то кожне бічне ребро піраміди менше півпериметра її основи.

***Вказівка*.** Зробити розгортку бічної поверхні даної піраміди.

**11.11 2024 р.**