

Геометрична прогресія. Формула n -го члена. Властивість геометричної прогресії. Формула суми n членів геометричної прогресії

Іськов Ігор Валерійович, Комарова Карина Вадимівна,
Казмірчук Валентина Вікторівна

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

Актуалізація матеріалу

1. Що таке числова послідовність?

Актуалізація матеріалу

1. Що таке числова послідовність?

Відповідь. Числова послідовність — це розміщені в певному порядку числа, або впорядкований набір чисел.

Актуалізація матеріалу

2. Яку числову послідовність називають арифметичною прогресією?

Актуалізація матеріалу

2. Яку числову послідовність називають арифметичною прогресією?

Відповідь. Арифметична прогресія — числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне і те саме число.

Актуалізація матеріалу

3. Що таке різниця арифметичної прогресії?

Актуалізація матеріалу

3. Що таке різниця арифметичної прогресії?

Відповідь. Різниця арифметичної прогресії — число, яке дорівнює різниці наступного і попереднього членів арифметичної послідовності.

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:
 $15; 14, 5; 14; 13, 5; 13; \dots$

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:
15; 14, 5; 14; 13, 5; 13; ...

Відповідь. Дана послідовність є арифметичною прогресією, $d = -0,5$.

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:
7; 13; 19; 24; ...

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:
7; 13; 19; 24; ...

Відповідь. Не є арифметичною прогресією.

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8} \dots$$

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8} \dots$$

Відповідь. Не є арифметичною прогресією.

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:

$$2\frac{1}{2}; 3; 3\frac{1}{2}; 4; \dots$$

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:

$$2\frac{1}{2}; 3; 3\frac{1}{2}; 4; \dots$$

Відповідь. Дана послідовність є арифметичною прогресією, $d = \frac{1}{2}$.

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:

1, 3; 3, 9; 6, 5; 9, 1; ...

Актуалізація матеріалу

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:

1, 3; 3, 9; 6, 5; 9, 1; ...

Відповідь. Дана послідовність є арифметичною прогресією, $d = 2, 6$.

Актуалізація матеріалу

5. Наведіть приклади арифметичної прогресії, де різниця є додатнім числом.

Актуалізація матеріалу

5. Наведіть приклади арифметичної прогресії, де різниця є додатнім числом.

Можливі варіанти:

5; 7; 9; 11; 13; ...

0, 5; 1; 1, 5; 2; ...

Актуалізація матеріалу

6. Як обчислити будь-який член арифметичної прогресії, знаючи її перший член і різницю?

Актуалізація матеріалу

6. Як обчислити будь-який член арифметичної прогресії, знаючи її перший член і різницю?

Відповідь. $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$.

Актуалізація матеріалу

7. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший і останній члени?

Актуалізація матеріалу

7. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший і останній члени?

Відповідь.
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Актуалізація матеріалу

8. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший член і різницю?

Актуалізація матеріалу

8. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший член і різницю?

Відповідь.
$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n.$$

Актуалізація матеріалу

9. Які властивості арифметичної прогресії ви знаєте?

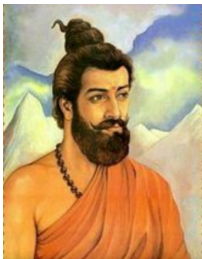
Актуалізація матеріалу

9. Які властивості арифметичної прогресії ви знаєте?

Відповідь. Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним

членів.
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Легенда про шахи



Розглянемо ще такі послідовності:

$$1; 3; 9; 27; 81; 243; \dots;$$

$$2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots;$$

Що для них характерно?

Розглянемо ще такі послідовності:

$$1; 3; 9; 27; 81; 243; \dots;$$

$$2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots;$$

Їм притаманна така характерна особливість: кожний наступний член послідовності отримано в результаті множення попереднього члена на одне й те саме число. Для першої послідовності це число дорівнює 3, для другої це число дорівнює $\frac{1}{2}$.

Що таке геометрична прогресія?

Означення

Геометричною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те ж саме відмінне від нуля число.

Що таке геометрична прогресія?

Означення

*Число, на яке множаться члени прогресії називають **знаменником** геометричної прогресії і позначають літерою q .*

Що таке геометрична прогресія?

Введемо позначення:

(b_n) — геометрична прогресія;

q — знаменник геометричної прогресії;

n — номер члена геометричної прогресії;

b_1 — перший член прогресії;

b_2 — другий член прогресії;

...

b_{n-1} — попередній для n -го член прогресії;

b_n — n -й член прогресії;

b_{n+1} — наступний за n -м член прогресії.

S_n — сума n членів геометричної прогресії.

Що таке геометрична прогресія?

Знаючи q — знаменник геометричної прогресії, і деякий її член, наприклад, b_n можна задати наступний член прогресії b_{n+1} :

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0, q \neq 0. \quad (1)$$

Такі формули, за допомогою яких наступний член можна задати через попередній, називають рекурентними формулами.

Що таке геометрична прогресія?

Цю формулу можна записати ще й так:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}. \quad (2)$$

Отже, бачимо: в геометричній прогресії відношення кожного члена, починаючи з другого, до попереднього є сталим числом, яке дорівнює знаменнику геометричної прогресії q .

Що таке геометрична прогресія?

Якщо $q = 1$, то геометрична прогресія складатиметься з однакових чисел. Наприклад, якщо $b_1 = -5$ і $q = 1$, то матимемо геометричну прогресію:

$$-5; -5; -5; -5; -5; \dots$$

Отриману послідовність можна також вважати і арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює -5 , а різниця дорівнює 0 .

Що таке геометрична прогресія?

Таку послідовність називають ще стаціонарною. Взагалі, будь-яка стаціонарна послідовність, усі члени якої відмінні від нуля, є одночасно і арифметичною, і геометричною прогресією.

Стаціонарна послідовність $0; 0; 0; 0; \dots$, є лише арифметичною прогресією.

Що таке геометрична прогресія?

Задача

Знайдіть сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_8 = 16$, а знаменник $q = \frac{3}{4}$

Що таке геометрична прогресія?

Задача

Знайдіть сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_8 = 16$, а знаменник $q = \frac{3}{4}$

Розв'язання. $q = \frac{b_8}{b_7}$. Виражаємо b_7 з цієї формули:

$$b_7 = \frac{b_8}{q}$$

$$b_7 = 16 : \frac{3}{4} = 16 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $b_7 = 21\frac{1}{3}$.

Що таке геометрична прогресія?

По аналогії з арифметичною прогресією індуктивними міркуваннями виведемо **формулу n -го члена** геометричної прогресії.

$$b_1 = b_1;$$

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3) \cdot q = b_1 \cdot q^4$$

Що таке геометрична прогресія?

Відповідно, як на попередньому слайді розпишемо наступні члени геометричної прогресії.

Бачимо закономірність у формулах різних членів прогресії.

Отже, можна вивести **загальну формулу n -го члена геометричної прогресії**.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Отже n -й член геометричної прогресії можна знайти за формулою

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad (3)$$

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | ? | ? | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | ? | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | ? | ? | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | ? | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | $0 < q < 1$ | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | $0 < q < 1$ | Спадна |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | $0 < q < 1$ | Спадна |
| 3; -6; 12; -24 | ? | ? | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | $0 < q < 1$ | Спадна |
| 3; -6; 12; -24 | 3 | ? | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | $0 < q < 1$ | Спадна |
| 3; -6; 12; -24 | 3 | -2 | ? | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | $0 < q < 1$ | Спадна |
| 3; -6; 12; -24 | 3 | -2 | $q < 0$ | ? |

Що таке геометрична прогресія?

Наведемо приклади геометричних прогресій

| Геометрична прогресія (b_n) | Перший член b_1 | Знаменник q | Знак і величина q | Властивості послідовності |
|---------------------------------|-------------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1; 2; 4; 8; 16 | 1 | 2 | $q > 0$ | Зростаюча |
| 16; 4; 1; 0.25 | 16 | 0.25 | $0 < q < 1$ | Спадна |
| 3; -6; 12; -24 | 3 | -2 | $q < 0$ | Знакозмінна |

Що таке геометрична прогресія?

Задача

У геометричній прогресії (c_n) перший член $c_1 = 9$, а знаменник $q = -1$. Знайдіть 1) c_{21} ; 2) c_{50} .

Що таке геометрична прогресія?

Задача

У геометричній прогресії (c_n) перший член $c_1 = 9$, а знаменник $q = -1$. Знайдіть 1) c_{21} ; 2) c_{50} .

Розв'язання. Запишемо c_{21} і c_{50} використавши формулу n -го члена геометричної прогресії $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ і отримаємо $c_{21} = c_1 \cdot q^{20}$ та $c_{50} = c_1 \cdot q^{49}$.

Що таке геометрична прогресія?

Задача

У геометричній прогресії (c_n) перший член $c_1 = 9$, а знаменник $q = -1$. Знайдіть 1) c_{21} ; 2) c_{50} .

Підставимо значення з умови у формули:

$$c_{21} = c_1 \cdot q^{20} = 9 \cdot (-1)^{20} = 9 \cdot 1 = 9.$$

$$c_{50} = c_1 \cdot q^{49} = 9 \cdot (-1)^{49} = 9 \cdot (-1) = -9.$$

Відповідь: $c_{21} = 9$; $c_{50} = -9$.

Що таке геометрична прогресія?

Задача

Виразіть члени c_{18} , c_{36} і c_{50} геометричної прогресії (c_n) через c_{12} і знаменник q .

Що таке геометрична прогресія?

Задача

Виразіть члени c_{18} , c_{36} і c_{50} геометричної прогресії (c_n) через c_{12} і знаменник q .

Розв'язання. $c_{12} = b_1 \cdot q^{11}$,

$$c_{18} = b_1 \cdot q^{17} = (b_1 \cdot q^{11}) \cdot q^6 = c_{12} \cdot q^6.$$

$$c_{36} = b_1 \cdot q^{35} = (b_1 \cdot q^{11}) \cdot q^{24} = c_{12} \cdot q^{24}.$$

$$c_{50} = b_1 \cdot q^{49} = (b_1 \cdot q^{11}) \cdot q^{38} = c_{12} \cdot q^{38}.$$

Відповідь: $c_{18} = c_{12} \cdot q^6$; $c_{36} = c_{12} \cdot q^{24}$; $c_{50} = c_{12} \cdot q^{38}$.

Властивості геометричної прогресії

Формулу для знаменника q геометричної прогресії можна записати декількома способами. Запишемо їх наступним чином:

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}} \quad \text{та} \quad q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Властивості геометричної прогресії

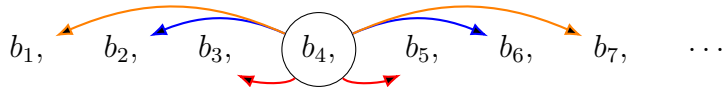
Можемо порівняти ці записи:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n + 1}{b_n}$$

За властивістю пропорції маємо:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \quad (4)$$

Властивості геометричної прогресії

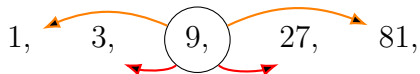


$$b_4^2 = b_3 \cdot b_5$$

$$b_4^2 = b_2 \cdot b_6$$

Властивості геометричної прогресії

Наприклад:



$$9^2 = 3 \cdot 27$$

$$81 = 81$$

$$9^2 = 1 \cdot 81$$

$$81 = 81$$

Властивості геометричної прогресії

Властивість

Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів.

Властивості геометричної прогресії

Розглянемо скінченну геометричну прогресію (b_n) , яка містить шість членів: $-1; 2; -4; 8; -16; 32$. Знайдемо добуток крайніх членів цієї прогресії та добутки членів, рівновіддалених від крайніх:

$$b_1 \cdot b_6 = (-1) \cdot 32 = -32;$$

$$b_2 \cdot b_5 = 2 \cdot (-16) = -32;$$

$$b_3 \cdot b_4 = (-4) \cdot 8 = -32.$$

Бачимо, що добутки членів прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, однакові й дорівнюють добутку крайніх членів.

Використаємо ці міркування для довільної скінченної геометричної прогресії $b_1; b_2; \dots; b_n$.

Властивості геометричної прогресії

Нехай $b_1 \cdot b_n = m$. Тоді:

$$b_2 \cdot b_{n-1} = b_1 q \cdot \frac{b_n}{q} = b_1 \cdot b_n = m,$$

$$b_3 \cdot b_{n-2} = b_2 q \cdot \frac{b_{n-1}}{q} = b_2 \cdot b_{n-1} = m.$$

$$b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, \frac{b_n}{q^2} \cdot \frac{b_n}{q}; b_n$$

$$b_1 \cdot b_n = b_1 q \cdot \frac{b_n}{q} = b_1 q^2 \cdot \frac{b_n}{q^2}.$$

Властивості геометричної прогресії

Властивість

Добуток будь-яких двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів.

Властивості геометричної прогресії

Задача

Знайдіть четвертий член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = 36, b_5 = 49$.

Властивості геометричної прогресії

Задача

Знайдіть четвертий член і знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Розв'язання. За властивістю геометричної прогресії $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$, звідси $b_4 = \sqrt{b_3 \cdot b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ або $b_4 = -\sqrt{b_3 \cdot b_5} = -42$.

Якщо $b_4 = 42$, то знаменник прогресії $q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$.

Якщо $b_4 = -42$, то $q = -\frac{7}{6}$.

Відповідь: $b_4 = 42, q = \frac{7}{6}$ або $b_4 = -42, q = -\frac{7}{6}$.

Історична довідка

Слово «прогресія» походить від латинського слова «progressio» і означає «рух уперед».

Уперше цей термін як математичний вживається у працях римського вченого Боеція (V — VI ст.).

Однак самі задачі згадуються задовго до нього і стосувалися вони господарської діяльності.



Задача із папірусу Рінда

«Є 7 будинків, в кожному по 7 котів, кожен кіт з'їдає 7 мишей, кожна миша з'їдає по 7 колосків ячменю, кожен колосок, якщо посіяти зерно з нього, дає 7 мір ячменю. Знайдіть суму загального числа будинків, котів, мишей, колосків і мір.»



Задача із папірусу Рінда

У папірусі дано 2 розв'язання цієї задачі:

| | |
|--|--|
| <p>Перше: безпосереднім множенням і наступним додаванням членів послідовності: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$</p> | <p>Друге: множення числа 2801 на 7. Число 2801 дістають в результаті додавання $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$</p> |
|--|--|

Сума n членів геометричної прогресії

Розглянемо n перших членів скінченної геометричної прогресії (b_n) : $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$.

Позначимо через S_n їх суму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми, враховуючи формулу n -го члена геометричної прогресії:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Сума n членів геометричної прогресії

Помножимо обидві частини цієї рівності на q , маємо:

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 \cdot q^n.$$

Знайдемо різницю $S_n \cdot q - S_n$:

$$S_n \cdot q - S_n = (b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} - b_1 \cdot q^n) - (b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1})$$

Сума n членів геометричної прогресії

Отже, $S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1$. Звідси $S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$.
При $q \neq 1$ отримуємо:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (5)$$

Цю рівність називають формулою суми n перших членів геометричної прогресії з знаменником, відмінним від 1. Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену і тоді $S_n = n \cdot b_1$.

Сума n членів геометричної прогресії

Оскільки $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, то отриману формулу суми n перших членів геометричної прогресії можна подати й у іншому вигляді.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - b_1}{q - 1} =$$

$\frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$ Тому маємо ще одну формулу для обрахування суми n членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} \quad (6)$$

Сума n членів геометричної прогресії

Отож, тепер ми маємо достатньо знань для підрахунку нагороди для Сети, яку пообіцяв цар.

Маємо послідовність: 1; 2; 4; 8; 16; 32; ...

Дана послідовність є геометричною прогресією, де $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$.

Загальна кількість зерен, яку попросив винахідник, дорівнює:

$$S_{64} = \frac{b_1(q^{64} - 1)}{q - 1} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Сума n членів геометричної прогресії

20 зерен пшениці мають вагу 1 грам. Знайдіть скільки років потрібно буде віддавати зерно Сету, якщо кожного дня відсилати йому потяг із 100 вагонів, у кожному з яких буде знаходитись 100 тон зерна.



Стародавня задача

Задача

Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на 2 тижні на таких умовах: «За це я тобі першого дня заплачу 1 крб., другого 2 крб., третього 3 крб., збільшуючи щоденну плату на 1 крб. Ти ж будеш давати мені милостиню: першого дня — 1 коп., другого дня — 2 коп., третього — 4 коп., і т.д. збільшуючи щодня милостиню вдвічі». Багатій з радістю погодився, вважаючи, що умови вигідні для нього. Скільки грошей отримав багатій?

Стародавня задача

Розв'язання. Сума, яку має сплатити бідняк за 14 днів, складає арифметичну прогресію, в якій $a_1 = 1$ і $d = 1$. Для підрахунку загальної кількості грошей, яку заплатить бідняк, використовуємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший член та різницю:

$$S_n = \frac{a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n.$$

Стародавня задача

Тоді $S_{14} = 105$. Отже, сума, яку має сплатити бідняк за 14 днів складає 105 крб. А багатій сплачує суму, яка складає суму геометричної прогресії, в якій $b_1 = 1$, $q = 2$.

Запишемо загальну формулу, за якою можна обрахувати суму n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Тому $S_{14} = \frac{1(2^{14} - 1)}{2 - 1} = 2^{14} - 1 = 16383$ коп. або 163 крб.

83 коп. Отже, багатій, отримавши від бідняка 105 крб., заплатив йому 163 крб.83 коп., тобто, за те, що бідняк у нього проживав 2 неділі, багатій заплатив йому 58 крб. 83 коп.

Закріплення матеріалу

1. Яка з наведених послідовностей є геометричною прогресією?

| А | Б | В | Г |
|--------------|---------------|--------------|-----------------|
| 2; 6; 18; 36 | 80; 40; 20; 5 | 4; 8; 16; 32 | 2; -10; 50; 250 |

Закріплення матеріалу

1. Яка з наведених послідовностей є геометричною прогресією?

| А | Б | В | Г |
|--------------|---------------|--------------|-----------------|
| 2; 6; 18; 36 | 80; 40; 20; 5 | 4; 8; 16; 32 | 2; -10; 50; 250 |

Відповідь: В

Закріплення матеріалу

2. Дано геометричну прогресію $-4; 12; -36; 108; \dots$
Вкажіть наступний член цієї прогресії.

| А | Б | В | Г |
|-----|------|-----|------|
| 324 | -324 | 105 | -105 |

Закріплення матеріалу

2. Дано геометричну прогресію $-4; 12; -36; 108; \dots$
Вкажіть наступний член цієї прогресії.

| А | Б | В | Г |
|-----|------|-----|------|
| 324 | -324 | 105 | -105 |

Відповідь: Б

Закріплення матеріалу

3. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, (b_n) , якщо $b_6 = \frac{14}{15}$; $b_7 = \frac{2}{3}$?

| А | Б | В | Г |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{3}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{7}{3}$ |

Закріплення матеріалу

3. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, (b_n) , якщо $b_6 = \frac{14}{15}$; $b_7 = \frac{2}{3}$?

| А | Б | В | Г |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{3}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{7}{3}$ |

Відповідь: Б

Закріплення матеріалу

4. Дано $b_1 = 2\sqrt{5}$, $q = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Знайдіть b_3 .

| А | Б | В | Г |
|---------------|------------------------|-----------------------|----------------|
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ | $\frac{2}{25}$ |

Закріплення матеріалу

4. Дано $b_1 = 2\sqrt{5}$, $q = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Знайдіть b_3 .

| А | Б | В | Г |
|---------------|------------------------|-----------------------|----------------|
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ | $\frac{2}{25}$ |

Відповідь: В

Закріплення матеріалу

5. Дано $b_{14} = 9$, $b_{16} = 16$. Знайдіть b_{15} .

| А | Б | В | Г |
|----|-----|---------|-----|
| 12 | -12 | -12; 12 | 144 |

Закріплення матеріалу

5. Дано $b_{14} = 9$, $b_{16} = 16$. Знайдіть b_{15} .

| А | Б | В | Г |
|----|-----|---------|-----|
| 12 | -12 | -12; 12 | 144 |

Відповідь: В

Підсумок уроку

1. Яку послідовність називають геометричною прогресією?

Підсумок уроку

1. Яку послідовність називають геометричною прогресією?

Відповідь: Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Підсумок уроку

2. Наведіть приклади геометричної прогресії.

Підсумок уроку

2. Наведіть приклади геометричної прогресії.

Можливі варіанти:

10; 20; 40; 80; ...

-7; 14; -28; 56; ...

Підсумок уроку

3. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?

Підсумок уроку

3. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?

Відповідь: Число, що дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності, називають знаменником геометричної прогресії та позначають буквою q .

Підсумок уроку

4. Чи є геометричною прогресією послідовність кубів натуральних чисел: $1; 8; 27; 64; 125; \dots$?

Підсумок уроку

4. Чи є геометричною прогресією послідовність кубів натуральних чисел: $1; 8; 27; 64; 125; \dots$?

Відповідь: Не є геометричною прогресією.

Підсумок уроку

5. Чи є геометричною прогресією послідовність натуральних степенів числа -5 : $-5; 25; -125; 625; \dots$?

Підсумок уроку

5. Чи є геометричною прогресією послідовність натуральних степенів числа -5 : $-5; 25; -125; 625; \dots$?

Відповідь: Є геометричною прогресією.

Домашнє завдання

- 1** *Задача Ейлера.* Чоловік, продаючи коня, запропонував покупцеві заплатити лише за цвяхи, якими прибито підкови до копит того коня. За перший цвях 1 пфеніг, за другий — 2, за третій — 4 і т. д. — за кожний удвічі більше, ніж за попередній. За скільки він продавав коня, якщо цвяхів було 32?

Домашнє завдання

- 1 Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії, у якій:
 - а) $b_1 + b_3 = 10$, $b_2 + b_4 = 30$
 - б) $b_5 - b_1 = 15$, $b_4 - b_2 = 6$
- 2 При якому значенні x значення виразів $2x + 1$, $x + 5$, $x + 11$, будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

