Геометрична прогресія

Автори:
Казмірчук Валентина Вікторівна
Комарова Каріна Вадимівна
Іськов Ігор Валерійович
Редактор:
Калашніков Ігор Вячеславович

Урок №1. Геометрична прогресія. Формула n-го члена. Властивість геометричної прогресії. Формула суми n членів геометричної прогресії

Освітні цілі

Сформувати поняття геометричної прогресії. **Вивести** формули: n-го члена геометричної прогресії, властивості геометричної прогресії, формулу суми n членів геометричної прогресії, і продемонструвати їх застосування.

Розвивати: навички логічного мислення, вміння аналізувати, узагальнювати, порівнювати, робити висновки.

Виховувати: пізнавальний інтерес до математики, сприяти вихованню поваги одне одного в колективі.

Тип уроку. Засвоєння нових знань, формування вмінь.

Компетентності

Знанєва складова. Наводить приклади: числових послідовностей, геометричних прогресій; формулює означення геометричної прогресії; доводить властивості геометричної прогресії.

Діяльнісна складова. Записує і пояснює формули: n-го члена геометричної прогресії, властивості геометричної прогресії, суми перших n членів цієї прогресії.

Ціннісна складова. Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження невідомих елементів прогресій, задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними, обчислення сум n-членів геометричної прогресії.

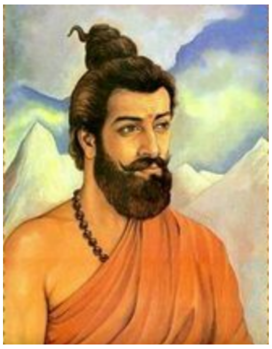
Обладнання

1. «Алгебра 9», підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. [1].
2. «Алгебра 9», підручник для загальноосвітніх навчальних закладів, Прокопенко Н. С., Захарійченко Ю. О., Кінащук Н. Л. [2].
3. Мультимедійна дошка.
4. Презентація.

Мотивація (2 хв.)

Пропонуємо сьогоднішній урок розпочати з легенди про шахи. (В розповіді учителя присутній діалог двох учнів)

Учитель: Шахи було винайдено в Індії. Коли індійський цар Шерам пограв в них, то здивувався, яка це цікава гра. Дізнавшись, що її створив один з його підлеглих, то наказав покликати його, щоб нагородити за вдалий винахід. Винахідник, на ім'я Сету прийшов до нього.



Цар: Я хочу гідно тебе нагородити, Сету, за чудову гру. Я достатньо багатий, щоб виконати будь-яке твоє бажання.

Сету: Накажи видати мені за першу клітину шахівниці одне пшеничне зерно, за другу клітину — 2 зернятка, за третю — 4, за четверту — 8 ...

Цар: Годі, (роздратовано перебив цар), — отримаєш своє зерно за всі 64 клітинки дошки, згідно твоєму бажанню: за кожну вдвічі більше ніж за попередню.

Учитель: Наступного дня цар поцікавився, чи отримав Сету свою винагороду. Як з'ясувалось в усіх коморах царства немає такої кількості зерен, щоб повністю її виплатити.

Так скільки ж зерна потрібно заплатить за шахи? Сьогодні ми це дізнаємось. В результаті сьогоднішнього уроку, ми зможемо підрахувати, скільки ж зерен мав би отримати Сета за свій винахід.

Актуалізація матеріалу (у вигляді фронтального опитування) (5 хв.)

1. Що таке числова послідовність?

   ОВ: Числова послідовність — це розміщені в певному порядку числа, або впорядкований набір чисел.

2. Яку числову послідовність називають арифметичною прогресією?

   ОВ: Арифметична прогресія — числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне і те саме число.

3. Що таке різниця арифметичної прогресії?

   ОВ: Різниця арифметичної прогресії — число, яке дорівнює різниці наступного і попереднього членів арифметичної послідовності.

4. З'ясуйте, чи є дані послідовності арифметичними прогресіями. Якщо є, то вкажіть її різницю:

   1) $15; 14,5; 14; 13,5; 13; \dots$

   2) $7; 13; 19; 24; \dots$

   3) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8} \dots$

   4) $2\frac{1}{2}; 3; 3\frac{1}{2}; 4; \dots$

   5) $1,3; 3,9; 6,5; 9,1; \dots$

   ОВ: 1) Дана послідовність є арифметичною прогресією, $d = -0,5$.

   2) Не є арифметичною прогресією.

   3) Не є арифметичною прогресією.

   4) Дана послідовність є арифметичною прогресією, $d = \frac{1}{2}$.

   5) Дана послідовність є арифметичною прогресією, $d = 2,6$.

5. Наведіть приклади арифметичної прогресії, де різниця є додатнім числом.

ОВ: Можливі варіанти:

$5; 7; 9; 11; 13; \ldots$

$0,5; 1; 1,5; 2; \ldots$

6. Наведіть приклади арифметичної прогресії, де різниця є від'ємним числом.

   ОВ: Можливі варіанти:

   $30; 20; 10; 0; \ldots$

   $7; 3; -1; -5; \ldots$

7. Як обчислити будь-який член арифметичної прогресії, знаючи її перший член і різницю?

   ОВ: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$.

8. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший і останній члени?

   ОВ: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

9. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший член і різницю?

   ОВ: $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

10. Які властивості арифметичної прогресії ви знаєте?

    ОВ: Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Пояснення теоретичного матеріалу

Розглянемо ще такі послідовності:

$$1; 3; 9; 27; 81; 243; \ \ldots;$$

$$2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots;$$

Їм притаманна така характерна особливість: кожний наступний член послідовності отримано в результаті множення попереднього члена на одне й те саме число. Для першої послідовності це число дорівнює 3, для другої це число дорівнює $\dfrac{1}{2}$.

Отож, сьогодні на уроці ми розглянемо послідовності, у яких кожний наступний член отриманий із попереднього шляхом множення на одне й те ж саме число, відмінне від нуля. Вважають, що перший член таких послідовностей також відмінний від нуля.

Означення 1. ***Геометричною прогресією*** *називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те ж саме відмінне від нуля число.*

Означення 2. *Число, на яке множаться члени прогресії називають* ***знаменником*** *геометричної прогресії і позначають літерою q.*

Введемо позначення:
(b_n) — геометрична прогресія;
q — знаменник геометричної прогресії;
n — номер члена геометричної прогресії;
b_1 — перший член прогресії;
b_2 — другий член прогресії;
...
b_{n-1} — попередній для n-го член прогресії;
b_n — n-й член прогресії;
b_{n+1} — наступний за n-м член прогресії.
S_n — сума n членів геометричної прогресії.

Знаючи q — знаменник геометричної прогресії, і деякий її член, наприклад, b_n можна задати наступний член прогресії b_{n+1}:

$$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q,\ n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0, q \neq 0.} \tag{1}$$

Такі формули, за допомогою яких наступний член можна задать через попередній, називають рекурентними формулами.

Цю формулу можна записати ще й так:

$$\boxed{q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.} \tag{2}$$

Отже, бачимо: в геометричній прогресії відношення кожного члена, починаючи з другого, до попереднього є сталим числом, яке дорівнює знаменнику геометричної прогресії q.

Якщо $q = 1$, то геометрична прогресія складатиметься з однакових чисел. Наприклад, якщо $b_1 = -5$ і $q = 1$, то матимемо геометричну прогресію:

$$-5; -5; -5; -5; -5; \ldots.$$

Отриману послідовність можна також вважати і арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює -5, а різниця дорівнює 0.

Таку послідовність називають ще стаціонарною. Взагалі, будь-яка стаціонарна послідовність, усі члени якої відмінні від нуля, є одночасно і арифметичною, і геометричною прогресією.

Стаціонарна послідовність $0; 0; 0; 0; \ldots$, є лише арифметичною прогресією.

Задача 1. *Знайдіть сьомий член геометричної прогресії* (b_n)*, якщо* $b_8 = 16$*, а знаменник* $q = \dfrac{3}{4}$

Розв'язання. $q = \dfrac{b_8}{b_7}$. Виражаємо b_7 з цієї формули: $b_7 = \dfrac{b_8}{q}$

$b_7 = 16 : \dfrac{3}{4} = 16 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{64}{3} = 21\dfrac{1}{3}$.

Відповідь: $b_7 = 21\dfrac{1}{3}$.

По аналогії з арифметичною прогресією індуктивними міркуваннями виведемо **формулу n-го члена** геометричної прогресії.

$b_1 = b_1;$
$b_2 = b_1 \cdot q;$
$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2;$
$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3;$
$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3) \cdot q = b_1 \cdot q^4;$
...
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Отже n-й член геометричної прогресії можна знайти за формулою

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}} \tag{3}$$

Наведемо приклади геометричних прогресій

Геометрична прогресія (b_n)	Перший член (b_1)	Знаменник q	Знак і величина (q)	Властивості послідовності
$1; 2; 4; 8; 16$	1	2	$q > 0$	Зростаюча
$16; 4; 1; 0.25$	16	0.25	$0 < q < 1$	Спадна
$3; -6; 12; -24$	3	-2	$q < 0$	Знакозмінна

Задача 2. *У геометричній прогресії* (c_n) *перший член* $c_1 = 9$*, а знаменник* $q = -1$*. Знайдіть* 1) c_{21}*;* 2) c_{50}.

Розв'язання. Запишемо c_{21} і c_{50} використавши формулу n-го члена геометричної прогресії $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ і отримаємо $c_{21} = c_1 \cdot q^{20}$ та $c_{50} = c_1 \cdot q^{49}$.

Підставимо значення з умови у формули:

$c_{21} = c_1 \cdot q^{20} = 9 \cdot (-1)^{20} = 9 \cdot 1 = 9$.

$c_{50} = c_1 \cdot q^{49} = 9 \cdot (-1)^{49} = 9 \cdot (-1) = -9$.

Відповідь: $c_{21} = 9$; $c_{50} = -9$.

Задача 3. *Виразіть члени c_{18}, c_{36} і c_{50} геометричної прогресії (c_n) через c_{12} і знаменник q.*

Розв'язання. $c_{12} = b_1 \cdot q^{11}$,

$c_{18} = b_1 \cdot q^{17} = (b_1 \cdot q^{11}) \cdot q^6 = c_{12} \cdot q^6$.

$c_{36} = b_1 \cdot q^{35} = (b_1 \cdot q^{11}) \cdot q^{24} = c_{12} \cdot q^{24}$.

$c_{50} = b_1 \cdot q^{49} = (b_1 \cdot q^{11}) \cdot q^{38} = c_{12} \cdot q^{38}$.

Відповідь: $c_{18} = c_{12} \cdot q^6$; $c_{36} = c_{12} \cdot q^{24}$; $c_{50} = c_{12} \cdot q^{38}$.

Властивості геометричної прогресії

Формулу для знаменника q геометричної прогресії можна записати декількома способами. Запишемо їх наступним чином:

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}} \quad \text{та} \quad q = \frac{b_n + 1}{b_n}.$$

Можемо прирівняти ці записи:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n + 1}{b_n}$$

За властивістю пропорції маємо:

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \qquad (4)$$

$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4, \quad b_5, \quad b_6, \quad b_7, \quad \ldots$

$$b_4^2 = b_3 \cdot b_5$$
$$b_4^2 = b_2 \cdot b_6$$
$$b_4^2 = b_1 \cdot b_7$$

Наприклад:

1, 3, 9, 27, 81,

$$9^2 = 3 \cdot 27 \qquad\qquad 9^2 = 1 \cdot 81$$
$$81 = 81 \qquad\qquad 81 = 81$$

Сформулюємо дану властивість:

Властивість 1. *Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів.*

Розглянемо скінченну геометричну прогресію (b_n), яка містить шість членів: $-1; 2; -4; 8; -16; 32$. Знайдемо добуток крайніх членів цієї прогресії та добутки членів, рівновіддалених від крайніх:

$$b_1 \cdot b_6 = (-1) \cdot 32 = -32;$$
$$b_2 \cdot b_5 = 2 \cdot (-16) = -32;$$
$$b_3 \cdot b_4 = (-4) \cdot 8 = -32.$$

Бачимо, що добутки членів прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, однакові й дорівнюють добутку крайніх членів.

Використаємо ці міркування для довільної скінченної геометричної прогресії $b_1; b_2; \ldots; b_n$.

Нехай $b_1 \cdot b_n = m$. Тоді:

$$b_2 \cdot b_{n-1} = b_1 q \cdot \frac{b_n}{q} = b_1 \cdot b_n = m,$$
$$b_3 \cdot b_{n-2} = b_2 q \cdot \frac{b_{n-1}}{q} = b_2 \cdot b_{n-1} = m.$$

$$b_1, b_1 q, b_1 q^2, \ldots, \frac{b_n}{q^2} \cdot \frac{b_n}{q}; b_n$$
$$b_1 \cdot b_n = b_1 q \cdot \frac{b_n}{q} = b_1 q^2 \cdot \frac{b_n}{q^2}.$$

Сформулюємо дану властивість:

Властивість 2. *Добуток будь-яких двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів.*

Задача 4. *Знайдіть четвертий член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = 36, b_5 = 49$.*

Розв'язання. За властивістю геометричної прогресії $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$, звідси $b_4 = \sqrt{b_3 \cdot b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ або $b_4 = -\sqrt{b_3 \cdot b_5} = -42$.

Якщо $b_4 = 42$, то знаменник прогресії $q = \dfrac{b_4}{b_3} = \dfrac{42}{36} = \dfrac{7}{6}$.

Якщо $b_4 = -42$, то $q = -\dfrac{7}{6}$.

Відповідь: $b_4 = 42, q = \dfrac{7}{6}$ або $b_4 = -42, q = -\dfrac{7}{6}$.

Історична довідка

Слово «прогресія» походить від латинського слова «progressio» і означає «рух уперед».

Уперше цей термін як математичний вживається у працях римського вченого Боеція (V — VI ст.).

Однак самі задачі згадуються задовго до нього і стосувалися вони господарської діяльності.

Задача із папірусу Рінда:

«Є 7 будинків, в кожному по 7 котів, кожен кіт з'їдає 7 мишей, кожна миша з'їдає по 7 колосків ячменю, кожен колосок, якщо посіяти зерно з нього, дає 7 мір ячменю. Знайдіть суму загального числа будинків, котів, мишей, колосків і мір.»

У папірусі дано 2 розв'язання цієї задачі:

Перше:	**Друге:**
безпосереднім множенням і наступним додаванням членів послідовності: $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$	множення числа 2801 на 7. Число 2801 дістають в результаті додавання $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$

У нас задачі на прогресії вперше зустрічаються в одній з найдавніших пам'яток руського права, «Руській правді», складеній при Ярославі Мудрому в XI столітті. Там є стаття, присвячена обчисленню приплоду від 22 овець за 12 років, при умові, що кожна вівця щорічно приносить одну вівцю і одного барана.

Сума n членів геометричної прогресії

Розглянемо n перших членів скінченної геометричної прогресії (b_n): b_1, b_2, b_3, $\ldots$, b_{n-1}, b_n.

Позначимо через S_n їх суму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми, враховуючи формулу n-го члена геометричної прогресії:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q, маємо:

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1 \cdot q^n.$$

Знайдемо різницю $S_n \cdot q - S_n$:

$$S_n \cdot q - S_n = (b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} - b_1 \cdot q^n) - \\ - (b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1})$$

Отже, $S_nq - S_n = b_1q^n - b_1$. Звідси $S_q(q-1) = b_1(q^n - 1)$.

При $q \neq 1$ отримуємо:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}} \tag{5}$$

Цю рівність називають формулою суми n перших членів геометричної прогресії з знаменником, відмінним від 1.

Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену і тоді $S_n = n \cdot b_1$.

Оскільки $b_n = b_1 \cdot q_{n-1}$, то отриману формулу суми n перших членів геометричної прогресії можна подати й у іншому вигляді.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$$

Тому маємо ще одну формулу для обрахування суми n членів геометричної прогресії:

$$\boxed{S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}} \tag{6}$$

Отож, тепер ми маємо достатньо знань для підрахунку нагороди для Сети, яку пообіцяв цар.

Маємо послідовність: $1; 2; 4; 8; 16; 32; \ldots$

Дана послідовність є геометричною прогресією, де $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$.

Загальна кількість зерен, яку попросив винахідник, дорівнює:

$S_{64} = \dfrac{b_1(q^{64} - 1)}{q - 1} = \dfrac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1$

$2^{64} - 1 = 18446744073709551615$.

20 зерен пшениці мають вагу 1 грам. Знайдіть скільки років потрібно буде віддавати зерно Сету, якщо кожного дня відсилати йому потяг із 100 вагонів, у кожному з яких буде знаходитись 100 тон зерна.

Тоді цар зрозумів, що такої кількості зерна немає на всій планеті. Для того, щоб зрозуміти, наскільки величезним є це число, уявимо, що зерно зберігають у коморі з площею підлоги 12 га. Її висота була б більшою за відстань від Землі до Сонця.

Задача 5. ***Стародавня задача.*** *Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на 2 тижні на таких умовах: «За це я тобі першого дня заплачу 1 крб., другого 2 крб., третього 3 крб., збільшуючи щоденну плату на 1 крб. Ти ж будеш давати мені милостиню: першого дня —- 1 коп., другого дня —- 2 коп., третього –– 4 коп., і т.д. збільшуючи щодня милостиню вдвічі». Багатій з радістю погодився, вважаючи, що умови вигідні для нього. Скільки грошей отримав багатій?*

Розв'язання. Сума, яку має сплатити бідняк за 14 днів, складає арифметичну прогресію, в якій $a_1 = 1$ і $d = 1$. Для підрахунку загальної кількості грошей, яку заплатить бідняк, використаємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший член та різницю:

$$S_n = \frac{a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Тоді $S_{14} = 105$. Отже, сума, яку має сплатити бідняк за 14 днів складає 105 крб. А багатій сплачує суму, яка складає суму геометричної прогресії, в якій $b_1 = 1$, $q = 2$. Запишемо загальну формулу, за якою можна обрахувати суму n перших членів геометричної прогресії: $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Тому $S_{14} = \dfrac{1(2^{14} - 1)}{2 - 1} = 2^{14} - 1 = 16383$ коп. або 163 крб. 83 коп. Отже, багатій, отримавши від бідняка 105 крб., заплатив йому 163 крб.83 коп., тобто, за те, що бідняк у нього проживав 2 неділі, багатій заплатив йому 58 крб. 83 коп.

Закріплення матеріалу

1. Яка з наведених послідовностей є геометричною прогресією?

А	Б	В	Г
2; 6; 18; 36	80; 40; 20; 5	4; 8; 16; 32	2; −10; 50; 250

ОВ: В

2. Дано геометричну прогресію $-4;\ 12; -36;\ 108; \ldots$. Вкажіть наступний член цієї прогресії.

А	Б	В	Г
324	−324	105	−105

ОВ: Б

3. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, (b_n), якщо $b_6 = \frac{14}{15}$; $b_7 = \frac{2}{3}$?

А	Б	В	Г
$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{3}$

ОВ: Б

4. Дано $b_1 = 2\sqrt{5}$, $q = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Знайдіть b_3.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{25}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{2}{25}$

ОВ: В

5. Дано $b_{14} = 9$, $b_{16} = 16$. Знайдіть b_{15}.

А	Б	В	Г
12	−12	−12; 12	144

ОВ: В

Підсумок уроку

1. Яку послідовність називають геометричною прогресією?

   ОВ: Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

2. Наведіть приклади геометричної прогресії.

   ОВ: $10; 20; 40; 80; \ldots$
   $-7; 14; -28; 56; \ldots$

3. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?

   ОВ: Число, що дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності, називають знаменником геометричної прогресії та позначають буквою q.

4. Чи є геометричною прогресією послідовність кубів натуральних чисел: $1; 8; 27; 64; 125; \ldots$?

   ОВ: Не є геометричною прогресією.

5. Чи є геометричною прогресією послідовність натуральних степенів числа -5: $-5; 25; -125; 625; \ldots$?

   ОВ: Є геометричною прогресією.

Домашнє завдання

1. ***Задача Ейлера.*** *Чоловік, продаючи коня, запропонував покупцеві заплатити лише за цвяхи, якими прибито підкови до копит того коня. За перший цвях 1 пфеніг, за другий — 2, за третій — 4 і т. д. — за кожний удвічі більше, ніж за попередній. За скільки він продавав коня, якщо цвяхів було 32?*

Розв'язання. Суму, яку має заплатити покупець утворюю геометричну прогресію, де $b_1 = 1$ та $q = 2$. Оскільки цвяхів було 32, то $n = 32$. Запишемо загальну формулу, за якою можна обрахувати суму n перших членів геометричної прогресії: $S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. Тому $S_n = \dfrac{1(2^{32}-1)}{2-1} = 2^{32} - 1 = 4294967295$

Відповідь: 4294967295

2. *Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії, у якій:*
а) $b_1 + b_3 = 10$, $b_2 + b_4 = 30$
б) $b_5 - b_1 = 15$, $b_4 - b_2 = 6$

Розв'язання.
а) Запишемо формулу n члена геометричної прогресії для b_3, b_2, b_4:

$$b_3 = b_1 q^2,$$
$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_4 = b_1 q^3.$$

Враховуючи умову, можемо скласти систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} b_1 + b_1q^2 = 10, \\ b_1q + b_1q^3 = 30; \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1(1 + q^2) = 10, \\ b_1q(1 + q^2) = 30; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + q^2 = \dfrac{10}{b_1}, \\ b_1q \cdot \dfrac{10}{b_1} = 30; \end{cases}$$

В другому рівнянні системи можемо скоротити $b_1 (b_1 \neq 0)$. Тоді:

$$10 \cdot q = 30,$$
$$q = 3 \ .$$

Знайдемо b_1:

$$b_1 + b_1q^2 = 10,$$
$$b_1 + 3^2 \cdot b_1 = 10,$$
$$10 \cdot b_1 = 10,$$
$$b_1 = 1.$$

б) Запишемо формулу n члена геометричної прогресії для b_5, b_2, b_4:

$$b_5 = b_1q^4,$$
$$b_2 = b_1q,$$
$$b_4 = b_1q^3.$$

Враховуючи умову, можемо скласти систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} b_1q^4 - b_1 = 15, \\ b_1q^3 - b_1q = 6; \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1(q^4 - 1) = 15, \\ b_1q(q^2 - 1) = 6; \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1(q^2 - 1)(q^2 + 1) = 15, \\ b_1q(q^2 - 1) = 6; \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1(q^2 - 1) = \dfrac{15}{(q^2 + 1)}, \\ \dfrac{15}{(q^2 + 1)} \cdot q = 6; \end{cases}$$

Розглянемо друге рівняння системи:

$$\frac{15}{(q^2+1)} \cdot q = 6;$$
$$\frac{q}{q^2+1} = \frac{6}{15};$$
$$\frac{q}{q^2+1} = \frac{2}{5};$$
$$2 \cdot (q^2+1) = 5 \cdot q;$$
$$2 \cdot q^2 - 5 \cdot q + 2 = 0;$$

Після розв'язання квадратного рівняння отримаємо:
$q = \frac{1}{2}$ або $q = 2$
Якщо $q = \frac{1}{2}$, то $b_1 = 1$.

Якщо $q = 2$, то $b_1 = -16$.

Відповідь: а) $b_1 = 1$, $q = 3$ б) Якщо $q = \frac{1}{2}$, то $b_1 = 1$; якщо $q = 2$, то $b_1 = -16$.

3. *При якому значенні x значення виразів $2x+1, x+5, x+11$, будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.*

Розв'язання.
За властивістю геометричної прогресії: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$.
Перепишемо цю властивістю відповідно до умови задачі:

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3$$

де $b_1 = 2x+1$, $b_2 = x+5$, $b_3 = x+11$.
Відповідно:
$(x+5)^2 = (2x+1) \cdot (x+11);$
$x^2 + 10x + 25 = 2x^2 + 22x + x + 11;$
$x^2 + 10x + 25 = 2x^2 + 23x + 11 = 0;$
$x^2 + 10x + 25 - 2x^2 - 23x - 11 = 0;$
$-x^2 - 13x + 14 = 0;$
$x^2 + 13x - 14 = 0;$
$D = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 169 + 4 \cdot 14 = 169 + 56 = 225$
$\sqrt{D} = \sqrt{225} = 15$
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-13-15}{2} = \frac{-28}{2} = -14$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-13+15}{2} = \frac{2}{2} = 1$

При $x_1 = -14$:
$b_1 = 2 \cdot (-14) + 1 = -28 + 1 = -27$;
$b_2 = -14 + 5 = -9$;
$b_3 = -14 + 11 = -3$.
При $x_2 = 1$:
$b_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$;
$b_2 = 1 + 5 = 6$;
$b_3 = 1 + 11 = 12$.
Відповідь: $-27, -9, -3$ або $3, 6, 12$.

Список використаних джерел

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгбра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 класу. — Гімназія, 2017. — С. 416. — ISBN 978-966-474-294-5.
2. Прокопенко Н. С., Захарійченко Ю. О., Кінащук Н. Л. Алгбра для загальноосвітніх навчальних закладів: підручник для 9 класу. — Ранок, 2017. — С. 288. — ISBN 978-617-09-3352-2.