



Schweizerische Maturitätsprüfung

Zürich und Pfäffikon SZ, Winter 2023

MATHEMATIK, Normales Niveau

Kand.-Nr.:

Номер кандидата

Name, Vorname:

Ім'я, Прізвище

Erreichte Punktzahl:

Результат досягнуто

Note:

Visum Korrigierende(r):

Fach:

Mathematik, Normales Niveau

Dauer:

4 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel:

Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Maximale Punktzahl:

55 Punkte

Autoren:

Meriton Mihovci, in Zusammenarbeit mit Urs Allenspach

Fachspezifische Anweisungen:

1. Bei jeder Aufgabe soll mit einem neuen Blatt begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
2. Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, e , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
3. Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind alle Herleitungen nachvollziehbar darzustellen.
4. Für die Maximalnote 6 werden höchstens 50 Punkte verlangt.

Завдання 1 (10 балів) Коло, пряма, дотична

Aufgabe 1 (10 Punkte) Kreis, Geraden, Tangenten

Задано коло k

Gegeben sei der Kreis $k : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$.

- a) (3 P) Bestimmen Sie Mittelpunkt M und Radius r des Kreises k . Skizzieren Sie anschliessend den Kreis. a) (3 B) Визначте центр M та радіус r кола k . Потім накресліть коло.
- b) (2 P) Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(3|7)$ und $Q(4|6)$ auf dem Kreis k liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade g durch P und Q . b) (2 B) Перевірте, чи лежать точки $P(3|7)$ і $Q(4|6)$ на колі k . Складіть рівняння прямої g , яка проходить через точки P і Q .
- c) (5 P) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Kreis k , die parallel zur Gerade g verlaufen. c) (5 P) Складіть рівняння дотичних до кола k , які паралельні прямій g . Здесь ваш текст 8

Aufgabe 2 (11 Punkte) Vektorgeometrie

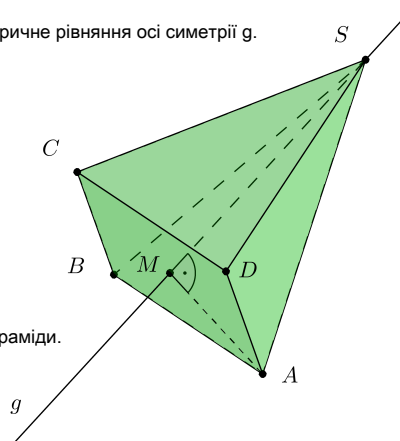
Завдання 2 (11 балів) Векторна геометрія Здесь ваш текст 9

Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche sind die Spitze $S(3 | -2 | 9)$, der Punkt

$A(4 | 5 | 2)$ und die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Symmetrieachse g gegeben.

Для прямої піраміди з квадратною основою задано вершину $S(3 | -2 | 9)$, точку $A(4 | 5 | 2)$ та напрямок v осі симетрії g .

- a) (1 P) Bestimmen Sie die Parametergleichung der Symmetrieachse g . a) (1 B) Визначте параметричне рівняння осі симетрії g .
- b) (1 P) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Gerade g und der Kante AS . b) (1 P) Обчисліть кут між прямою g і ребром AS .
- c) (2 P) Berechnen Sie den Mittelpunkt M der Pyramidengrundfläche. c) (2 B) Знайдіть центр M основи піраміди.



Нехай f - інша пряма з рівнянням параметра:

Sei f eine weitere Gerade mit der Parametergleichung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

- d) (2 P) Diskutieren Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und f und bestimmen Sie – falls vorhanden – den Schnittpunkt. d) (2 B) Визначте взаємне розташування прямих g і f та знайдіть точку їх перетину, якщо вона є.
- e) (2 P) Der Punkt D der Pyramidengrundfläche liegt auf der Geraden f und hat den Abstand 6 zum Punkt A . Bestimmen Sie den Punkt D . e) (2 P) Точка D основи піраміди лежить на прямій f і знаходиться на відстані 6 від точки A . Знайдіть координати точки D .
- f) (1 P) Bestimmen Sie die fehlenden Punkte B und C der Pyramidengrundfläche. f) (1 B) Знайдіть відсутні точки B і C основи піраміди
- g) (2 P) Geben Sie die Parametergleichung der Ebene Ω an, die die Seitenfläche ASD enthält. Liegt der Punkt $P(-2 | -1 | -1)$ in der Ebene Ω ? g) (2 B) Складіть параметричне рівняння площини Ω , яка містить бічну поверхню ASD . Чи належить точка $P(-2 | -1 | -1)$ площині Ω ?

Aufgabe 3 (11 Punkte) Stochastik

Rea hat in ihrer Weihnachtsguetzlibox 27 Mailänderli, davon 9 Stück herzförmig.

Задача 3 (11 балів) Стохастика

У коробці з різдвяним печивом у Реї є 27 печеньок "Майлендерлі", 9 з яких мають форму серця.



a) (5.5 P)

3 коробки навання дістають міланське печиво. Яка ймовірність того, що витягнуте печиво має форму серця?

$a_1)$ (0.5 P) Aus der Box wird zufällig ein Mailänderli gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Mailänderli herzförmig ist?

3 коробки навання з'їдають два майлендерлі. Яка ймовірність того, що обидва з'їдених майлендерлі були у формі серця?

$a_2)$ (1 P) Aus der Box werden zufällig zwei Mailänderli gegessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gegessenen Mailänderli beide herzförmig waren?

$a_3)$ (4 P) Aus der Box werden zufällig 5 Mailänderli gegessen. 5 мейлендерлі з'їдають навання з коробки.

i) (2 P) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Mailänderli davon herzförmig war? Яка ймовірність того, що саме одна майлендерлі була у формі серця?

ii) (2 P) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mailänderli davon herzförmig waren? Яка ймовірність того, що принаймні два з цих міланських тістечок були у формі серця?

Коробка з печивом Реа досліджується далі. З 27 міланських бісквітів 9 мають форму серця, 7 - зірочки, 5 - круглі, а решта 6 - квадратні.

Die Guetzlibox von Rea wird weiter untersucht. Von den 27 Mailänderli sind 9 herzförmig, 7 sternförmig, 5 rund und die restlichen 6 viereckig.

3 коробки навання дістають три майлендерлі. Яка ймовірність того, що саме два з цих трьох майлендерлі мають однакову форму?

b) (2 P) Aus der Box werden zufällig drei Mailänderli gegessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser drei Mailänderli die gleiche Form haben?

c) (3.5 P) Nun kommt die Guetzlibox von Jon – Reas kleinem Bruder – ins Spiel. Die Guetzlibox von Jon enthält 25 Mailänderli, davon 6 herzförmige. Rea und Jon entscheiden sich, ihre Guetzli in einer gemeinsamen grösseren Box zu vereinigen.

Із загальної коробки навання витягнуто тістечко. Яка ймовірність того, що це Майлендерлі зі скриньки Реа?

$c_1)$ (0.5 P) Aus der gemeinsamen Box wird zufällig ein Mailänderli gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Mailänderli aus der Box von Rea stammt?

$c_2)$ (1.5 P) Aus der gemeinsamen Box wird zufällig ein Mailänderli gezogen. Dieses Mailänderli ist herzförmig. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses herzförmige Mailänderli aus der Guetzlibox von Rea stammt? Із загальної коробки навання витягнуто тістечко. Це тістечко має форму серця. Яка ймовірність того, що цей майлендерлі у формі серця з коробки з-під печива Реї?

$c_3)$ (1.5 P) Die Wahrscheinlichkeit, dass man ein sternförmiges Mailänderli zieht, beträgt $\frac{4}{13}$.

Wie viele sternförmige Mailänderli enthält die Guezlibox von Jon?

Ймовірність того, що буде витягнуто зіркоподібний мейлендерлі дорівнює $\frac{4}{13}$. Скільки зіркоподібних мейлендерлі міститься у коробці Джона?

Тут у гру вступає коробка для печива Джона, молодшого брата Реї. У коробці печива Джона знаходиться 25 міланських печива, 6 з яких мають форму серця. Рі та Джон вирішують скласти свої печива у більшу коробку

Aufgabe 4 (8 Punkte) Analysis, Integralrechnung

Дано дві функції
 Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2 + 4$ und $g(x) = \frac{1}{9} \cdot (x - 3)^2$.

- a) (2 P) Skizzieren Sie die Graphen der zwei gegebenen Funktionen. Побудуйте графіки двох заданих функцій.
- b) (1 P) Berechnen Sie die Schnittstellen der zwei Funktionen. Обчисліть межі двох функцій
- c) (3 P) Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ der zwei Funktionen. Визначити первісну $F(x)$ та первісну $G(x)$ двох функцій
- d) (2 P) Berechnen Sie die Fläche, die von den zwei Funktionsgraphen eingeschlossen wird. Обчисліть площу, обмежену двома графіками функцій.

Aufgabe 5 (7 Punkte) Analysis, Differentialrechnung Завдання 5 (7 балів) Аналіз, диференціальне числення

Задано функцію
 Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x}$.

- a) (0.5 P) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f . Побудуйте графік функції f .
- b) (1.5 P) Wir betrachten Rechtecke mit den Eckpunkten $(0|0)$, $(x|0)$, $(x|f(x))$, und $(0|f(x))$
 Розглянемо прямокутники з кутовими точками
 für reelle $x > 0$. Zeichnen Sie ein Beispiel eines solchen Rechtecks ein und stellen Sie eine Funktion $A(x)$ auf, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von x beschreibt.
 Намалюйте такий прямокутник і задайте функцію $A(x)$, яка описує площу прямокутника як функцію від x .
- c) (3 P) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $A(x)$. Обчисліть першу та другу похідну функції $A(x)$

Bemerkung: Falls Sie Teilaufgabe b) nicht gelöst haben, und nur dann, dürfen Sie in der folgenden Teilaufgabe mit der Funktionsgleichung $A(x) = 2x \cdot e^{-x} + 1$ weiterrechnen.

- d) (2 P) Für welchen x -Wert wird der Flächeninhalt des Rechtecks maximal?
 При якому значенні x площа прямокутника стає максимальною?

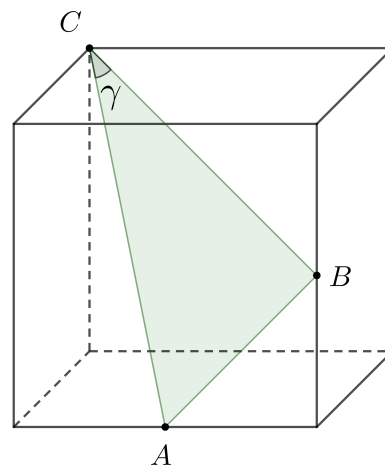
Зауваження: Якщо ви не розв'язали підзадачу b), то можете продовжити роботу з рівнянням функції $A(x)$ у наступній підзадачі.

Завдання 6 (8 балів) Самостійна робота
Aufgabe 6 (8 Punkte) Voneinander unabhängige Aufgaben

- a) (3 P) Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{4x^2}$ an der Stelle $x = 1$. Знайдіть дотичну до графіка функції $f(x)$ у точці $x = 1$
- b) (3 P) Von der Gleichung $x^3 - \frac{17}{6}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{1}{3} = 0$ знайдіть решту дійсних розв'язків.

kennt man eine Lösung $x_1 = 2$. Bestimmen Sie die restlichen reellen Lösungen.

$$x^3 - \frac{17}{6}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$



відомо один розв'язок $x_1 = 2$. Знайдіть решту дійсних розв'язків.

Трикутник ABC вписано в куб з довжиною ребра $s = 6$ (див. рисунок навпроти); A і B - центри ребер. Знайдіть кут γ .

- c) (2 P) Das Dreieck ABC ist einem Würfel mit Kantenlänge $s = 6$ einbeschrieben (vgl. Abbildung nebenan); A und B sind Kantenmitten. Berechnen Sie den Winkel γ .